17. Tétel

Skaláris szorzat tul, mátrix összeadás, szorzás

Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. Mátrixok összeadása és szorzásai, e műveletek tulajdonságai, determinánsok szorzástétele. A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

**Def skaláris szorzás:** az u( u1…..un)T és a v (v1….vn)T skaláris szorzata u\*v=u1v1+……+unvn

Skaláris szorzat tulajdonságai:

(1) u · v = v · u,

(2) u · (v + w) = u · v + u · w ill.

(3) (λu) · v = λ(u · v)

**Mátrixok összeadása:** csak azonos méretű mátrixokat tudunk összeadni, mégpedig úgy, hogy megfelelő koordinátákat egyenként. Skalárral szorzás hasonló a normális vektor skalárszorzásához.

(1) A + B = B + A, (2) (A + B) + C = A + (B + C),

(3) λ(A + B) = λA + λB, (4) (λ + κ)A = λA + κA,

(5) λ(κA) = (λκ)A, továbbá (6) (A + B) ⊤ = A⊤ + B⊤, (7) λ · A⊤ = (λA) ⊤.

**Mátrixok szorzása egymással:** (szivárványszorzás)

Tfh az A ∈ Rn×k mátrix sorvektorai a1 , . . . an és a B ∈ Rk×ℓ mátrix oszlopvektorai b 1 , . . . bℓ . Ekkor az A · B ∈ Rn×ℓ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az ai · b j skaláris szorzat.

**A mártix szorzás:**

Asszociatív, összeadásra disztributív, transzponálás disztributív rá nézve

(1) λ · AB = (λA)B = A(λ · B).

(2) A(B + C) = AB + AC ill. (A + B)C = AC + BC.

(3) (AB)⊤ = B⊤A⊤.

**Determinánsok szorzástétele:** A, B ∈ Rn×n ⇒ |AB| = |A||B|. (a mátrix szorzat determinánsa egyenlő a mátrixok determinánsainak szorzatával)

**A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**

Visszatekintés a skaláris szorzatra:

Legyen A ∈ Rn×k tetsz. n × k méretű mátrix. Ekkor

1. Ha egy tetszőleges ej egység oszlopvektorral (k magas vektor) jobbról megszorzom az A mátrixot, akkor essentially a mátrix j-edik oszlopát kapom(duh). Ugyanez igaz a egy ei (n magas vektor) transzponáltjával szorzom meg balról az A mátrixot, akkor a mátrix i-edik sora az eredmény.
2. Ha az A mátrixot jobbról megszorzom a k × k méretű egységmátrixxal, vagy ha (az A mátrixot) balról megszorzom az n × n egységmátrixxal akkor ugyanúgy mindkét esetben az A mátrixot kapom vissza (duh)
3. Ha u ∈ Rk és v ∈ Rn , akkor A · u az A oszlopainak, v⊤ · A pedig az A sorainak lin.komb-ja(duh)

**Tfh A oszlopai a1 , . . . , ak és B sorai b1 , . . . , bk . Ekkor**

(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az a1 , . . . , ak oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a bj oszlop tartamazza.

(2) Hasonlóan, az i-dik sor a b1 , . . . , bk sorok lineáris kombinációja, mégpedig az ai sorban szereplő együtthatókkal.

A képen Betűtípus, szöveg, sor, diagram látható

Automatikusan generált leírás

BIZ: a matrix szorzás definíciójából egyből következik, hogy az AB-nek a j-edik oszlopa az Abj, és hogy az i-edik sora az aiB, tehát annyira nem különleges, de érdekes.

**ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.**

Lemma: ha C mátrix oszlopai előállnak A mátrix lineáris kombinációjaként akkor AB=C, és ha C mátrix sorai előállnak A mátrix lineáris kombinációjaként, akkor BA=C.(A mátrixszorzás nem kommutatív!!!)

BIZ: A különleges tulajdonsából következik.

Ha A’ ESÁ-okkal kapható A-ból, akkor, akkor A’=BA alakú.

BIZ: A lemma miatt elég annyit bizonyítani, hogy A’ sorai előállnak A sorai lin.kombjaiként. Ez a tulajdonság természetesen teljesül a kiindulási A mátrixra, és könnyen látható, hogy ha egy mátrix ilyen tulajdonságú, akkor a belőle egyetlen ESÁ elvégzésével kapott mátrix szintén ilyen tulajdonságú marad. Ezért az ESÁ-ok sorozatával kapott A′ mátrixra is fennáll ez a tulajdonság, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk.